II.2 pgcd et ppcm de polynômes

Comme dans le cadre des entiers, on a le théorème :

Théorème II.1 *Soit A et B deux polynômes de $K[X]$. Il existe un unique diviseur commun unitaire D à A et B de la forme $D = AU + BV$, avec $U, V \in K[X]$.*

Ce diviseur commun particulier vérifie aussi :

Proposition II.2 *Étant donnés deux polynômes A et $B \in K[X]$ il existe un unique polynôme D vérifiant les trois propriétés :*

(i) le polynôme D est unitaire ;

(ii) le polynôme D est un diviseur commun à A et B ($D \mid A$ et $D \mid B$) ;

(iii) tout diviseur commun à A et B divise D ($D' \mid A$ et $D' \mid B$ implique $D' \mid D$).

Bien sûr les deux diviseurs communs précédents sont les mêmes :

Définition II.3 *Étant donnés deux polynômes A et $B \in K[X]$, l'unique polynôme des deux énoncés précédents s'appelle le* ***plus grand commun diviseur*** *(en abrégé* pgcd *) de A et B ; on le note* $\mathrm{pgcd}(A, B)$.

II.3 Polynômes premiers entre eux

Les polynômes constants (non nuls) divisent tous les polynômes. Deux polynômes A et B qui n'ont que les polynômes constants (non nuls) comme diviseurs communs vérifient $\mathrm{pgcd}(A, B) = 1$. Comme dans les entiers, on définit :

Définition II.4 *Deux polynômes A et B sont dits* ***premiers entre eux*** *(ou étrangers) si leur pgcd est égal à 1.*

Comme pour les entiers, les polynômes premiers entre eux sont caractérisés par la propriété suivante :

Théorème II.5 (de Bezout pour les polynômes) *Deux polynômes A et $B \in K[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $U, V \in K[X]$ tels que :*

$$1 = AU + BV.$$

De ce théorème découlent les versions polynomiales des corollaires du théorème de Bezout pour les entiers. Je ne donne que les énoncés, laissant au lecteur le soin de retranscrire les démonstrations dans le cadre polynomial.

Lemme II.6 (de Gauss polynomial) *Soient $A, B, C \in K[X]$ trois polynômes. Si A est premier avec B et s'il divise BC alors il divise C.*

Corollaire II.7 *Soient $A_1, A_2, B \in K[X]$ trois polynômes tels que A_1 et A_2 sont premiers entre eux. Si A_1 et A_2 divisent B alors B est divisible par le produit $A_1 A_2$.*

Corollaire II.8 *Soient $A_1, \ldots, A_r, B \in K[X]$ des polynômes ($r \geqslant 1$) tels que $A_1, \ldots, A_r$ sont premiers entre eux deux-à-deux. Si tous les polynômes A_i ($1 \leqslant i \leqslant r$) divisent B alors B est divisible par le produit $A_1 \times \cdots \times A_r$.*

Corollaire II.9 *Soient $A, B_1, B_2 \in K[X]$ des polynômes. Si A est premier avec B_1 et B_2 alors il est premier avec le produit $B_1 B_2$.*

Corollaire II.10 *Soient $A, B_1, \ldots, B_r \in K[X]$ des polynômes. Si A est premier avec chacun des B_i ($1 \leqslant i \leqslant r$) alors il est premier avec le produit $B_1 \times \cdots \times B_r$.*